UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES
ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA
Année Universitaire 2019-2020

ALGEBRE LINEAIRE : MATRICES-EXERCICES
SERIE : 3

Exercice : 1

1- On considère les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $E = (1 \quad 2)$; $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calculer les produits : BA ; CB ; AC et CA. Peut-on calculer BC ? Calculer le produit EF et FE.
Que remarque-t-on concernant les deux produits calculés ?
2-Calculer ${}^tC$, ${}^tB$, ${}^tB \times {}^tC$; comparer avec ${}^t(CB)$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice : 2

On considère deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$
1- On suppose que A est inversible. Montrer que A^{-1} est inversible et que :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2-a. on suppose que A est inversible. Montrer que ${}^tA$ est inversible et que :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

b. Montrer que A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible.

3-On suppose que A et B sont inversibles. (A+B) est-elle nécessairement inversible ?

4-L'ensemble des matrices inversibles de est-il un espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice : 3

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1-Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x,y), calculer f(x,y).
2-Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I^2$.
3-En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice : 4

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les applications linéaires suivantes :
- f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z)= (3x-y+2z,\ x-y,\ 2x-y-z)$$

- g : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} g(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3 \\ g(e_2) = e_1 - e_2 + 3e_3 \\ g(e_3) = e_2 - e_3 \end{cases}$$

-h : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par sa matrice(relativement à sa base canonique de $\mathbb{R}^3$) notée H et donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1-Déterminer la matrice F de f et la matrice G de g relativement à la base (e_1 , e_2 , e_3).
2-Pour tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z), calculer h(x,y,z).
3-Pour tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z), calculer g(x,y,z) de deux manière différentes.
4- Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ de deux manières différentes.
5-Déterminer la matrice de 2f+3g.

Exercice : 5
1-On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a-Quelle est la dimension de $M_4(\mathbb{R})$.
b-Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{A , B, C, D\}$ est une base de $M_4(\mathbb{R})$.
c-Montrer que l'application de f : M → M + ${}^tM$ est un endomorphisme de $M_4(\mathbb{R})$ et déterminer sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$. L'application f est-elle un automorphisme de $M_4(\mathbb{R})$?
2-On définit les formes linéaires f , g et h sur $\mathbb{R}2$ par :

$$\forall\ u = (x,y) \in \mathbb{R}2$$
$$f(u) = x + y\ ;\ g(u) = 2\,x + 3\,y\ ;\ h(u) = 7\,x - 4\,y$$

Sans calcul, justifier qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}3 \setminus \{0,0,0\}$ tel que :

$$\forall\ u = (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \alpha f(u) + \beta g(u) + \gamma h(u) = 0$$